Φροντιστήριο 1 – Λύσεις Ασκήσεων

Άσκηση 1

Να αποδείξετε ότι, για κάθε άρτιο αριθμό *n* μεγαλύτερο από 2, υπάρχει 3-κανονικό (κάθε κόμβος έχει βαθμό 3) μη κατευθυνόμενο γράφημα με *n* κόμβους.

Λύση

Έστω *n* αυθαίρετος άρτιος αριθμός, $n \geq 4$. Αφού ο n είναι άρτιος, μπορούμε να τον γράψουμε ως $n = 2k$. Κατασκευάζουμε γράφημα G = (V,E) με *n* κόμβους ως εξής:

V = {1,2,3,…,2*k*}

E = $\{(1,2),(2,3),\ldots,(2k-1,k),(2k,1)\} \cup \{(i,k+i) | 1 \leq i \leq k\}$

Στο γράφημα αυτό οι κόμβοι έχουν τοποθετηθεί διαδοχικά κατά μήκος της περιφέρειας ενός κύκλου και επιπλέον συνδέθηκαν μέσω «ακτίνων» με τους αντιδιαμετρικούς τους κόμβους. Προφανώς, το γράφημα είναι 3-κανονικό αφού κάθε κόμβος συνδέεται με τον προηγούμενο του κόμβο, τον επόμενο του κόμβο και τον κόμβο που βρίσκεται απέναντί του.

Άσκηση 2

Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Λύση

Ξεκινούμε αποδεικνύοντας το πιο κάτω βοηθητικό λήμμα.

> Λήμμα: Για κάθε ζεύγος περιττών ακέραιων *m* και *n* το γινόμενο *mn* είναι περιττό.
>
> Απόδειξη: Αφού οι δύο αριθμοί είναι περιττοί μπορούν να γραφτούν ως $m = 2a+1$ και $n = 2b+1$. Άρα
>
> $$m \cdot n = (2a+1)(2b+1) = 4ab + 2a + 2b + 1 = 2(2ab + a + b) + 1$$
>
> Και επομένως το γινόμενο αυτό είναι περιττό.

Επιστρέφουμε στο ζητούμενο της άσκησης. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Ας υποθέσουμε για να φτάσουμε σε αντίφαση ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε, υπάρχουν ακέραιοι X και Y τέτοιοι ώστε $\sqrt{2} = \frac{X}{Y}$. Έστω x και y οι ακέραιοι που προκύπτουν από τους X και Y μετά από όλες τις απλοποιήσεις που δυνατόν να είναι εφικτές στον λόγο $\frac{X}{Y}$. Προφανώς ισχύει και πάλι ότι $\sqrt{2} = \frac{x}{y}$ και επιπλέον

$$\sqrt{2} = \frac{x}{y} \Rightarrow 2 = \frac{x^2}{y^2} \Rightarrow 2y^2 = x^2 \qquad (*)$$

Επομένως ο αριθμός x^2 είναι άρτιος. Αυτό συνεπάγεται ότι και ο x είναι άρτιος. (Διότι αν ήταν περιττός τότε, από το Λήμμα πιο πάνω, και ο x^2 θα ήταν περιττός). Κατά συνέπεια, ο

x μπορεί να γραφτεί ως $x = 2k$ όπου k κάποιος ακέραιος. Αντικαθιστώντας στην ισότητα (*), παίρνουμε

$$2y^2 = x^2 \Rightarrow 2y^2 = 4k^2 \Rightarrow y^2 = 2k^2$$

Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο y^2 είναι άρτιος. Όπως και πιο πάνω, ισχύει ότι και ο y είναι άρτιος.

Άρα οι αριθμοί x και y είναι άρτιοι που σημαίνει ότι έχουν κοινό παράγοντα τον αριθμό 2. Αυτό όμως μας οδηγεί σε άτοπο αφού υποθέσαμε ότι οι δύο αριθμοί δεν έχουν κοινούς παράγοντες.

Κατά συνέπεια, η αρχική μας υπόθεση ήταν λανθασμένη και το $\sqrt{2}$ είναι άρρητος αριθμός. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 3</u>

Να αποδείξετε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 0$, ο αριθμός $\phi(n) = 4^{2n+1} + 3^{2n+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

<u>Λύση</u>

Απόδειξη με επαγωγή στο *n.*

Βασική Περίπτωση: Για $n=0$ έχουμε $\phi(0) = 4^{2\cdot 0+1} + 3^{2\cdot 0+1} = 4 + 3 = 7$. Επομένως το φ(0) είναι πολλαπλάσιο του 7 και το ζητούμενο έπεται.

Υπόθεση της Επαγωγής: Υποθέτουμε ότι για τον ακέραιο k ο αριθμός $\phi(k) = 4^{2k+1} + 3^{2k+1}$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Έστω $\phi(k) = 4^{2k+1} + 3^{2k+1} = 7a$ για κάποιο ακέραιο *α.*

Βήμα της Επαγωγής: Θέλουμε να αποδείξουμε ότι ο αριθμός $\phi(k+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 7. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\phi(k+1) &= 4^{2(k+1)+1} + 3^{2(k+1)+1} = 4^{2k+1+2} + 3^{2k+1+2} = 4^2 \cdot 4^{2k+1} + 3^2 \cdot 3^{2k+1} \\
&= (9+7)\cdot 4^{2k+1} + 9\cdot 3^{2k+1} = 7\cdot 4^{2k+1} + 9\cdot 4^{2k+1} + 9\cdot 3^{2k+1} \\
&= 7\cdot 4^{2k+1} + 9(4^{2k+1} + 3^{2k+1}) = 7\cdot 4^{2k+1} + 9\cdot\phi(k) \\
&= \{\text{Υπόθεση της Επαγωγής}\} \\
&\quad 7\cdot 4^{2k+1} + 9\cdot 7a \\
&= 7(4^{2k+1} + 9a)
\end{aligned}$$

Επομένως ο $\phi(k+1)$ είναι πολλαπλάσιο του 7.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 4</u>

Να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε λέξεις x και y ισχύει ότι $(xy)^R = y^R x^R$.

<u>Λύση</u>

Έστω x κάποια αυθαίρετη λέξη. Θα αποδείξουμε ότι, για κάθε λέξη y ισχύει ότι $(xy)^R = y^R x^R$. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος της λέξης y, έστω n.

Βασική Περίπτωση: Για n=0 έχουμε $y = \varepsilon$

$$(xy)^R = (x\varepsilon)^R = x^R = \varepsilon^R x^R = y^R x^R$$

και το ζητούμενο έπεται

Υπόθεση της Επαγωγής: Υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη y με $|y| < k$,

$$(xy)^R = y^R x^R.$$

Βήμα της Επαγωγής: Έστω ότι η συμβολοσειρά y έχει μήκος k. Τότε μπορούμε να γράψουμε τη y ως $y = y'a$, όπου $|y'| = k - 1$ και το a είναι ένα σύμβολο.

Έχουμε ότι

$(xy)^R = (x\, y'a)^R$

$= \{$Υπόθεση της Επαγωγής με πρώτη λέξη την $x\,y'$ και δεύτερη λέξη την a η οποία προφανώς ικανοποιεί $|a| < k$ $\}$

$(a)^R\,(x\,y')^R$

$= \{$Υπόθεση της Επαγωγής με πρώτη λέξη την x και δεύτερη λέξη την y' η οποία προφανώς ικανοποιεί $|y'| < k$ $\}$

$(a)^R\,(y')^R\,(x)^R$

$= \{$Υπόθεση της Επαγωγής με πρώτη λέξη την y' και δεύτερη λέξη την a η οποία προφανώς ικανοποιεί $|a| < k$ $\}$

$(y'\,a)^R\,(x)^R$

$= y^R x^R$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.